الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

امتحان بكالوريا التعليم الثانوي

دورة: 2021

الشعبة: تقني رياضي

اختبار في مادة: الرياضيات

المدة: 04 سا و30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بحدّها الأوّل u_0 حيث: $u_0=3$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_{n+1}=\frac{7}{9}u_n+1$

1) أ . برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n<\frac{9}{2}$

ب. بيّن أنّ المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثمّ استنتج أنّها متقاربة.

2) المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\frac{1}{3}u_n-\frac{3}{2}$

أ . بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{7}{9}$ ثمّ احسب حدّها الأوّل.

ب. اكتب عبارة الحدّ العام v_n بدلالة n

جـ. استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n، $u_n=-\frac{3}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n+\frac{9}{2}$ ثمّ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

3) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث: $S_n=\frac{1}{3}u_0+\frac{1}{3}u_1+\cdots+\frac{1}{3}u_n$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لكلّ سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التبريـر.

1) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع: $a=3n+2$ ، $b=5n+1$ و نضع: $d=PGCD(a;b)$

مجموعة القيم الممكنة لِـ d هي: أ) $\{1;3\}$ ب) $\{1;7\}$ جـ) $\{1;5\}$

2) نضع: $A(\alpha)=\ln(e^{3\alpha}+e^{\alpha})+\ln(e^{4\alpha}+e^{2\alpha})+\ln(e^{5\alpha}+e^{3\alpha})$ ، حيث α عدد حقيقي.

من أجل كلّ عدد حقيقي α العبارة المبسطة لِـ $A(\alpha)$ هي:

أ) $6\alpha+\ln(e^{2\alpha}+1)$ ب) $6+3\ln(e^{2\alpha}+1)$ جـ) $6\alpha+3\ln(e^{2\alpha}+1)$

3) حلّ المعادلة التفاضلية $y'=-2y+4$ الذي يحقق $y(0)=2021$ هو الدّالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ:

أ) $h(x)=2019e^{-2x}+2$ ب) $h(x)=2019e^{2x}+2$ جـ) $h(x)=2021e^{-2x}-2$

4) المتتالية العددية (v_n) معرّفة من أجل كلّ عدد طبيعي n بـ: $v_n = \ln(n+2) - \ln(n+1)$

من أجل كلّ عدد طبيعي n ، المجموع $v_0 + v_1 + \cdots + v_n$ يساوي:

أ) $-\ln(n+1)$ ب) $\ln(n+2)$ جـ) $1-\ln(n+1)$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1) ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 9

2) عيّن باقي القسمة الإقليدية للعدد 2021^{1442} على 9

3) بيّن أنّ العدد $2021^{1442} + 1691^{1954} - 8$ مضاعف للعدد 9

4) برهن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، العدد $5^{6n} + 2021^{6n+1} + 1443$ مضاعف للعدد 9

5) من أجل كلّ عدد طبيعي n نضع: $A_n = 2021^{1442} + 1691^{1954} + 5n$

عيّن الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون: $A_n \equiv 0[9]$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الدّالة العددية g معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 - 5 + e^{x-1}$

1) بيّن أنّ الدّالة g متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

2) أ . بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاّ وحيدا α حيث: $1,71 < \alpha < 1,72$

ب. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي الموجب x إشارة $g(x)$

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ : $f(x) = x + 1 + (-x^2 - 2x + 3)e^{1-x}$

(C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1) أ . بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$: $f'(x) = g(x)e^{1-x}$

ب. استنتج أنّ الدّالة f متزايدة تماما على $[\alpha;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $[0;\alpha]$

جـ. بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدّالة f

2) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x+1$ مقارب مائل لِـ (C) ثمّ ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى (Δ)

3) بيّن أنّ (C) يقبل مماسا (T) موازيا لِـ (Δ) في نقطة A يُطلب تعيين فاصلتها (لا يطلب كتابة معادلة (T))

4) أ . بين أنّ (C) يقبل نقطة انعطاف وحيدة فاصلتها $(1+\sqrt{6})$

ب. ارسم (Δ) ، (T) و (C) (نأخذ: $f(\alpha) \simeq 1,1$ ، $f(\sqrt{5}) \simeq 1,4$ و $f(1+\sqrt{6}) \simeq 3,1$)

5) الدّالة العددية h معرّفة على المجال $]-\infty;0]$ بـ: $h(x) = -x + 1 + (-x^2 + 2x + 3)e^{1+x}$

(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ . تَحقّق أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]-\infty;0]$: $h(x) = f(-x)$

ب. اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C) ثمّ ارسمه.

انتهى الموضوع الأول

تصحيح رياضيات باك 2021 تقني رياضي

الموضوع الأول

التمرين ① (4ن)

$u_{n+1}=\frac{7}{9}u_n+1 \qquad u_0=3$

① أ- البرهان بالتراجع أن $u_n<\frac{9}{2}$

$n=0 \qquad u_0=3$

$u_0<\frac{9}{2}$ و $P(0)$ صحيحة

نفرض $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$

$P(n)$ صحيحة $u_n<\frac{9}{2}$

$P(n+1)$ صحيحة $u_{n+1}<\frac{9}{2}$ ؟

$u_n<\frac{9}{2}$ ومنه $\frac{7}{9}u_n<\frac{7}{2}$

ومنه $\frac{7}{9}u_n+1<\frac{9}{2}$ أي $u_{n+1}<\frac{9}{2}$

من أجل كل عدد طبيعي n: $u_n<\frac{9}{2}$

(u_n) محدودة من الأعلى بـ $\frac{9}{2}$

ب) $u_{n+1}-u_n=\frac{7}{9}u_n+1-u_n$

$=-\frac{2}{9}u_n+1$

$u_n<\frac{9}{2}$ منه $-\frac{2}{9}u_n>-1$

منه $-\frac{2}{9}u_n+1>0$ أي $u_{n+1}-u_n>0$

ومنه (u_n) متزايدة تماما

ج) (u_n) متزايدة تماما ومحدودة من الأعلى بـ $\frac{9}{2}$ فهي متقاربة

② $v_n=\frac{1}{3}u_n-\frac{3}{2}$

أ) (v_n) هندسية:

$v_{n+1}=\frac{1}{3}u_{n+1}-\frac{3}{2}$

$=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}u_n+1\right)-\frac{3}{2}$

$=\frac{7}{27}u_n-\frac{7}{6}$

$v_n=\frac{1}{3}u_n-\frac{3}{2}$ منه $\frac{7}{27}u_n=v_n+\frac{3}{2}$

منه $u_n=3v_n+\frac{9}{2}$

$v_{n+1}=\frac{7}{27}\left(3v_n+\frac{9}{2}\right)-\frac{7}{6}$

$v_{n+1}=\frac{7}{9}v_n$

(v_n) هندسية أساسها $q=\frac{7}{9}$

حدها الأول $v_0=\frac{1}{3}u_0-\frac{3}{2}=\boxed{-\frac{1}{2}}$

ب) $v_n=v_0q^n=\boxed{-\frac{1}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n}$

ج) $u_n=3v_n+\frac{9}{2}=\boxed{-\frac{3}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n+\frac{9}{2}}$

$\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim -\frac{3}{2}\left(\frac{7}{9}\right)^n+\frac{9}{2}=\boxed{\frac{9}{2}}$

لأن $-1<\frac{7}{9}<1$ و $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{9}\right)^n=0$

③ $S_n=\frac{1}{3}u_0+\frac{1}{3}u_1+\dots+\frac{1}{3}u_n$

$v_n=\frac{1}{3}u_n-\frac{3}{2}$ منه $\frac{1}{3}u_n=v_n+\frac{3}{2}$

$S_n=v_0+\frac{3}{2}+v_1+\frac{3}{2}+\dots+v_n+\frac{3}{2}$

$=\underbrace{(v_0+v_1+\dots+v_n)}_{n+1\text{ حد}}+\underbrace{\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\dots+\frac{3}{2}\right)}_{n+1\text{ عامل}}$

$S_n=v_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1}+\frac{3}{2}(n+1)$

$=-\frac{1}{2}\left(\frac{(7/9)^{n+1}-1}{7/9-1}\right)+\frac{3}{2}n+\frac{3}{2}$

$=\frac{9}{4}\left(\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}-1\right)+\frac{3}{2}n+\frac{3}{2}$

$=\frac{9}{4}\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}-\frac{9}{4}+\frac{3}{2}n+\frac{3}{2}$

$\boxed{S_n=\frac{9}{4}\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}+\frac{3}{2}n-\frac{3}{4}}$

التمرين ② (4ن)

① الجواب - ب - لأن

$b=5n+1 \qquad a=3n+2$

$d=PGCD(a,b)$

$\begin{cases}d|a\\d|b\end{cases}$ منه $d|5(3n+2)-3(5n+1)$

منه $d|7$

منه $d\in\{1,7\}$

② الجواب - ج - لأن

$A(\alpha)=\ln(e^{3\alpha}+e^{\alpha})+\ln(e^{4\alpha}+e^{2\alpha})+\ln(e^{5\alpha}+e^{3\alpha})$

$=\ln\left((e^{3\alpha}+e^{\alpha})(e^{4\alpha}+e^{2\alpha})(e^{5\alpha}+e^{3\alpha})\right)$

$=\ln\left((e^{7\alpha}+2e^{5\alpha}+e^{3\alpha})(e^{5\alpha}+e^{3\alpha})\right)$

$=\ln(e^{7\alpha}+2e^{5\alpha}+e^{3\alpha})+\ln(e^{5\alpha}+e^{3\alpha})$

$=\ln\left(e^{3\alpha}(e^{4\alpha}+2e^{2\alpha}+1)\right)+\ln\left(e^{3\alpha}(e^{2\alpha}+1)\right)$

$A=\ln e^{3\alpha}+\ln(e^{4\alpha}+2e^{2\alpha}+1)+\ln e^{3\alpha}+\ln(e^{2\alpha}+1)$

$A=3\alpha+\ln((e^{2\alpha}+1)^2)+3\alpha+\ln(e^{2\alpha}+1)$

$A=6\alpha+2\ln(e^{2\alpha}+1)+\ln(e^{2\alpha}+1)$

$A=6\alpha+3\ln(e^{2\alpha}+1)$

③ الجواب - أ - لأن

$b=4 \qquad a=-2 \qquad y'=-2y+4$

حلولها العامة $x\mapsto Ce^{ax}-\frac{b}{a}$

$x\mapsto Ce^{-2x}+2$

حل خاص يحقق $y(0)=2021$

يعني $Ce^{-2(0)}+2=2021$ أي $C=2019$

إذن $h(x)=2019e^{-2x}+2$

④ الجواب - ب - لأن

$v_n=\ln(n+2)-\ln(n+1)=\ln\frac{n+2}{n+1}$

$v_0+v_1+\dots+v_n=\ln\left(\frac{2}{1}\right)+\ln\left(\frac{3}{2}\right)+\dots+\ln\left(\frac{n+2}{n+1}\right)$

$=\ln\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\dots\times\frac{n+2}{n+1}\right)$

$=\ln\left(\frac{n+2}{1}\right)=\ln(n+2)$

التمرين ③ (5ن)

① باقي قسمة 5^n على 9

$5^0\equiv1[9] \quad 5^1\equiv5[9] \quad 5^2\equiv7[9] \quad 5^3\equiv8[9]$

$5^4\equiv4[9] \quad 5^5\equiv2[9] \quad 5^6\equiv1[9]$

$n=$	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$	///
$5^n\equiv$	1	5	7	8	4	2	[9]

② باقي قسمة 2021^{1442} على 9

$2021\equiv5[9]$ منه $2021^{1442}\equiv5^{1442}[9]$

$1442=6\times240+2$ لشكل $6k+2$

$\equiv7[9]$

باقي قسمة 2021^{1442} على 9 هو 7

③ تبيين أن $2021^{1442}+1691^{1954}-8\equiv0[9]$

$1691\equiv8[9]$ و $1691\equiv-1[9]$

و $1961^{1954}\equiv(-1)^{1954}[9]$

$\equiv1[9]$

إذن $2021^{1442}+1691^{1954}-8\equiv7+1-8[9]$

$\equiv0[9]$

④ من أجل كل عدد طبيعي n :

$5^{6n}+2021^{6n+1}+1443\equiv 0[9]$

$2021^{6n+1}\equiv 5^{6n+1}[9]$ ومنه $2021\equiv 5[9]$

$1443\equiv 3[9]$

$5^{6n}+2021^{6n+1}+1443\equiv 5^{6n}+5^{6n+1}+3[9]$

$\equiv 1+5+3[9]$

$\equiv 9[9]$

$\equiv 0[9]$.

⑤ $A_n=2021^{1442}+1961^{1954}+5n$

$1961^{1954}\equiv 1[9]$ $\quad 2021^{1442}\equiv 7[9]$

منه $A_n\equiv 0[9]$ يعني

$7+1+5n\equiv 0[9]$

$5n\equiv 1[9]$ أي $5n\equiv -8[9]$

$n\equiv 2[9]$ أي $10n\equiv 2[9]$ أي

$n=9\alpha+2$ $\quad \alpha\in\mathbb{N}$

التمرين ④ (7ن)

I) $g(x)=x^2-5+e^{x-1}$

$D=[0,+\infty[$

① $g'(x)=2x+e^{x-1}$

$g'(x)\geq 0$ على $[0,+\infty[$ ومنه g متزايدة تماما على $[0,+\infty[$

② أ) g مستمرة لأنها مجموع دالتين مستمرتين على $\mathbb{R}$ فهي مستمرة على $[0,+\infty[$ فهي مستمرة ومتزايدة تماما على $[1,71;1,72]$

$g(1,72)=0,0928$ $\quad g(1,71)=-0,041$

$g(1,71)\times g(1,72)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $g(x)=0$ لها حل وحيد $1,71<\alpha<1,72$ يحقق $g(\alpha)=0$

ب)

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) $f(x)=x+1+(-x^2-2x+3)e^{1-x}$

$D=[0,+\infty[$

① أ) $f'(x)=1+(-2x-2)e^{1-x}-e^{1-x}(-x^2-2x+3)$

$=(e^{x-1}-\cancel{2x}-2+x^2+\cancel{2x}-3)e^{1-x}$

$f'(x)=(x^2-5+e^{x-1})e^{1-x}=g(x)e^{1-x}$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

f متناقصة تماما على $[0,\alpha]$ و f متزايدة تماما على $[\alpha,+\infty[$

② أ) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+1+(-x^2-2x+3)e^{1-x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty} x+1+\left(-\frac{x^2}{e^x}-2\frac{x}{e^x}+\frac{3}{e^x}\right)e$

$=+\infty$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$1+3e$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

ب) (Δ) معادلته $y=x+1$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-(x+1)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^2-2x+3)e^{1-x}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{x^2}{e^x}-2\frac{x}{e^x}+\frac{3}{e^x}\right)e$

$=0$

(Δ) مقارب مائل عند $+\infty$

الوضعية النسبية لـ (C) و (Δ)

$f(x)-y=(-x^2-2x+3)e^{1-x}$

إشارة من إشارة $-x^2-2x+3$

$-x^2-2x+3=0$

$x_2=1$ $\quad x_1=-3$ $\quad \Delta=16$

x	$-\infty$		-3		0		1		$+\infty$
$-x^2-2x+3$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
الوضعية				(C) تحت (Δ)			M	(C) فوق (Δ)	

$M(1,2)$ نقطة تقاطع (C) و (Δ)

③ (C) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) في نقطة A

$f'(x)=1$ يعني $g(x)e^{1-x}=1$

يعني $g(x)=\frac{1}{e^{1-x}}$ أي

$g(x)=e^{x-1}$ أي $x^2-5+e^{x-1}=e^{x-1}$

ومنه $x^2-5=0$ أي $x=\sqrt{5}$ أو $x=-\sqrt{5}$ مرفوض

منه $x_0=\sqrt{5}$ $([0,+\infty[)$

$A(\sqrt{5},f(\sqrt{5}))$

④ أ) (C) يقبل نقطة انعطاف.

$f'(x)=g(x)e^{1-x}$

وعنه $f''(x)=g'(x)e^{1-x}-e^{1-x}g(x)$

$=(2x+e^{x-1})e^{1-x}-e^{1-x}(x^2-5+e^{x-1})$

$=(2x+e^{x-1}-x^2+5-e^{x-1})e^{1-x}$

$=(-x^2+2x+5)e^{1-x}$

إشارة $f''(x)$ من إشارة $-x^2+2x+5$

$-x^2+2x+5=0$

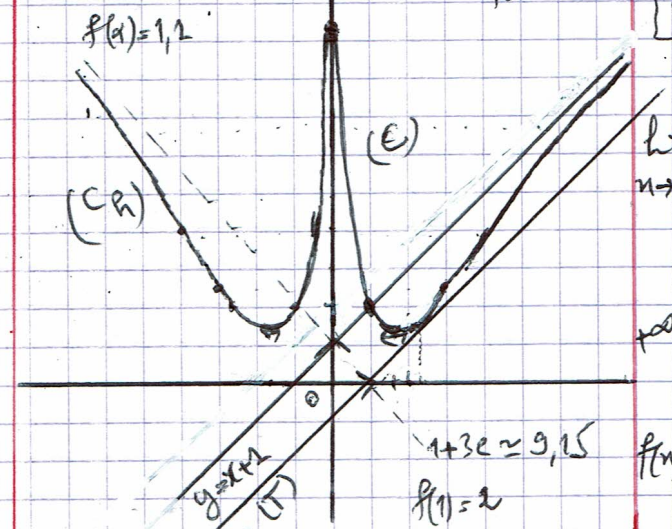
$\Delta=24$ $\quad x_1=1-\sqrt{6}$ مرفوض $\quad x_2=1+\sqrt{6}$ مقبول

x	$-\infty$		$1-\sqrt{6}$		0		$1+\sqrt{6}$		$+\infty$
$-x^2+2x+5$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	

إذن (C) يقبل نقطة انعطاف وحيدة فاصلتها $1+\sqrt{6}$

ب) أنظر

$B(1+\sqrt{6},f(1+\sqrt{6}))$



$1+3e\simeq 9,15$

$f(1)=2$

$f(4)\simeq 3,95$ $\quad f(3)=2,4$ $\quad f(2)=1,16$

⑤ $h(x)=-x+1+(-x^2+2x+3)e^{1+x}$

$D=]-\infty,0]$

④ $f(-x)=-x+1+(-(-x)^2-2(-x)+3)e^{1-(-x)}$

$=-x+1+(-x^2+2x+3)e^{1+x}=h(x)$

$]-\infty,0]$.

ب) (C_h) يقطع (C) بالنسبة لمحور التراتيب.

الأستاذ
بن سعدي فوزي
ثانوية بن خلوي علي
سطيف
23/06/2021

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

نعتبر المعادلة: $(E)\cdots 13x-9y=1$ ، ذات المجهول $(x;y)$ حيث x و y عددان صحيحان.

1) أ . تَحقّق أنّه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلاً للمعادلة (E) فإن: $x\equiv 7[9]$

ب. استنتج حلول المعادلة (E)

2) أ . ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5

ب. نضع: $A_n=3^{4n}+3^{4n+1}+3^{4n+2}-3$ حيث n عدد طبيعي.

بيّن أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، A_n يقبل القسمة على 5

3) بفرض أنّ $(x;y)$ حلّ للمعادلة (E) حيث x و y عددان طبيعيان.

عيّن قيم العدد الطبيعي n حتى يقبل العدد $n+3^{y-x}+2023^{2022}$ القسمة على 5

التمرين الثاني: (04 نقاط)

لكلّ سؤال جواب واحد فقط صحيح من بين الأجوبة الثلاثة المقترحة، عيّنه مع التبرير.

السؤال	الإجابة أ)	الإجابة ب)	الإجابة ج)
1) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بِـ : $f(x)=3x+\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ هي دالة:	زوجية.	لا زوجية ولا فردية.	فردية.
2) الدّالة العددية g معرّفة على $[0;+\infty[$ بِـ: $g(x)=\dfrac{(x-1)e^x-x+1}{e^x+1}$ و (C) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم. تكون: $y=x+a$ معادلة للمستقيم المقارب المائل لِـ (C) من أجل:	$a=1$	$a=-1$	$a=0$
3) العدد الطبيعي N يُكتب $\overline{3745}$ في نظام تعداد أساسه 8 ويُكتب $\overline{5\alpha 15}$ في نظام تعداد أساسه 7 من أجل:	$\alpha=6$	$\alpha=5$	$\alpha=4$
4) β عدد حقيقي، تكون الأعداد: $e^{\beta}+1$ ، $e^{\beta}+2$ ، $2e^{\beta}$ بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية من أجل β يساوي:	$\ln(\sqrt{5}-1)$	0	$\ln(1+\sqrt{5})$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

المتتالية العددية (u_n) معرّفة بِـ: $u_0=3+e^{-2}$ ومن أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=u_n^2-6u_n+12$

1) أ . تَحقّق أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_{n+1}=(u_n-3)^2+3$

ب. برهن بالتراجع أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $3<u_n<4$

2) أ . ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n)

ب. استنتج أنّ (u_n) متقاربة.

3) المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = \ln(u_n - 3)$

أ . بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية أساسها 2 يُطلب حساب حدّها الأوّل.

ب. اكتب v_n بدلالة n ثمّ استنتج أنّه من أجل كلّ عدد طبيعي n ، $u_n = 3 + e^{(-2^{n+1})}$

جـ. احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

4) نضع من أجل كلّ عدد طبيعي n: $P_n = (u_0 - 3)(u_1 - 3) \times \cdots \times (u_n - 3)$

احسب P_n بدلالة n

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I) الدّالة العددية g معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = 2\ln x - 1 - \frac{1}{x^2}$

1) بيّن أنّ الدّالة g متزايدة تماما على المجال $]0;+\infty[$

2) أ . بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $1,89 < \alpha < 1,90$

ب. استنتج حسب قيم العدد الحقيقي الموجب تماما x إشارة $g(x)$

II) الدّالة العددية f معرّفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x) = -x - 2 + \frac{3 + 2\ln x}{x}$

(C) التمثيل البياني للدّالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ (وحدة الطول $2cm$)

1) أ . احسب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ ثمّ فسّر النتيجة هندسيا.

ب. احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) أ . بيّن أنّه من أجل كلّ x من $]0;+\infty[$: $f'(x) = \frac{1}{x^2} g\left(\frac{1}{x}\right)$

ب. بيّن أنّ الدّالة f متزايدة تماما على المجال $]0;\frac{1}{\alpha}]$ و متناقصة تماما على المجال $[\frac{1}{\alpha};+\infty[$

جـ. شكّل جدول تغيّرات الدّالة f

3) أ . احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (-x-2)]$ ثمّ استنتج أنّ (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.

ب. ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى (Δ)

4) بيّن أنّ (C) يقبل نقطة انعطاف A فاصلتها 1 ثمّ اكتب معادلة لِـ (T) مماس (C) عند A

5) ارسم (T)، (Δ) و (C) (نأخذ: $\frac{1}{\alpha} \simeq 0,53$ و $f(\frac{1}{\alpha}) \simeq 0,73$).

6) الدّالة h معرّفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $h(x) = |x| + 2 - \frac{3 + \ln(x^2)}{|x|}$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ . بيّن أنّ الدّالة h زوجية.

ب. تحقق أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0;+\infty[$: $h(x) = -f(x)$

جـ. اشرح كيفية رسم (C_h) انطلاقا من (C) ثمّ ارسمه.

انتهى الموضوع الثاني

تصحيح الرياضيات لبكالوريا 2022 تقني رياضي

الموضوع الثاني

التمرين ① (04ن)

$13x-9y=1$ —— (E)

① أ) (x,y) حل لـ (E) فإن $13x-9y=1$

أي $13x=9y+1$ أي $13x\equiv 1[9]$

أي $4x\equiv -8[9]$ أي $x\equiv -2[9]$

أي $x\equiv 7[9]$

ب) $x\equiv 7[9]$ يعني $x=9k+7$

إذن $13(9k+7)-9y=1$

ومنه $13(9k)+13(7)-9y=1$

أي $13(9k)+90=9y$

منه $y=13k+10$

$S=\{(9k+7,13k+10),k\in\mathbb{Z}\}$

② أ- بواقي قسمة 3^n على 5

$3^0\equiv 1[5]$ $3^1\equiv 3[5]$ $3^2\equiv 4[5]$

$3^3\equiv 2[5]$ $3^4\equiv 1[5]$

$n\equiv$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$[5]$
$3^n\equiv$	1	3	4	2	

ب) $A_n=3^{4n}+3^{4n+1}+3^{4n+2}-3$

لدينا $A_n\equiv 3^{4n}+3^{4n+1}+3^{4n+2}-3[5]$

$\equiv 1+3+4-3[5]$

$\equiv 5[5]$

ومنه: $A_n\equiv 0[5]$

③ (x,y) حل لـ (E)

x,y عددان طبيعيان

قيم n حتى يقبل العدد $n+3^{y-x}+2023^{2022}$ القسمة على 5

$3^{y-x}=3^{13k+10-9k-7}$

$=3^{4k+3}$

يعني $n+3^{y-x}+2023^{2022}\equiv 0[5]$

$n+3^{4k+3}+3^{2022}\equiv 0[5]$

$2022=4\times 505+2$ لأن $4k+2$

إذن $3^{2022}\equiv 4[5]$ ومنه

$n+2+4\equiv 0[5]$

إذن $n+6\equiv 0[5]$

منه $n+1\equiv 0[5]$

أي $n\equiv -1[5]$ ومنه $n\equiv 4[5]$

منه $n=5\alpha+4$ $\alpha\in\mathbb{N}$

التمرين ② (04ن)

1) الإجابة -ج- لأن

من أجل كل x من $\mathbb{R}$, $-x\in\mathbb{R}$

$$f(-x)=-3x+\frac{e^{-2x}-1}{e^{-2x}+1}\times\frac{e^{2x}}{e^{2x}}$$

$$=-3x+\frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}}$$

$$=-3x-\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$$

$$=-\left(3x+\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)$$

$f(-x)=-f(x)$

f دالة فردية.

② الجواب -ب- لأن

$$g(x)=\frac{(x-1)e^x-x+1}{e^x+1}$$

$$\begin{array}{l|l} (x-1)e^x-x+1 & e^x+1 \\ -(x-1)e^x-x+1 & x-1 \\ \hline 0 \quad -2x+2 & \end{array}$$

$$g(x)=x-1+\frac{-2x+2}{e^x+1}$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)-(x-1)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x+2}{e^x+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x(-2+\frac{2}{x})}{e^x(1+\frac{1}{e^x})}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}-2\left(\frac{x}{e^x}\right)=0$$

أي $y=x+a=x-1$

$a=-1$

③ الجواب -أ- لأن

$N=\overline{3745}$ في نظام تعداد أساسه 8

أي $N=3\times 8^3+7\times 8^2+4\times 8+5$

$N=2021$

$N=\overline{5415}$ في نظام تعداد أساسه 7 و

$N=5\times 7^3+4\times 7^2+1\times 7+5$

$N=49\alpha+1727$

و $\boxed{0\leq\alpha\leq 6}$

يعني $N=N$

$49\alpha+1727=2021$

$49\alpha=294$

أي $\alpha=6$

④ الجواب -ج- لأن

$e^\beta+1$ ، $e^\beta+2$ ، $2e^\beta$ حدود متتابعة لمتتالية هندسية يعني

$(e^\beta+2)^2=(e^\beta+1)(2e^\beta)$

$e^{2\beta}+4e^\beta+4=2e^{2\beta}+2e^\beta$

$e^{2\beta}-2e^\beta-4=0$

نضع $X=e^\beta$ و $X>0$

$X^2-2X-4=0$

$\Delta=20$ $X_1=1+\sqrt{5}$ مقبول

$X_2=1-\sqrt{5}$ مرفوض

أي $X=1+\sqrt{5}$ $e^\beta=1+\sqrt{5}$

منه $\beta=\ln(1+\sqrt{5})$

التمرين ③ (05ن)

$u_0=3+e^{-2}$ $u_{n+1}=u_n^2-6u_n+12$

① أ-

$u_{n+1}=u_n^2-6u_n+12$

$=\underbrace{u_n^2-6u_n+9}+3$

$=(u_n-3)^2+3$

ب) البرهان بالتراجع أن $3<u_n<4$

$u_0=3+e^{-2}=3,13$ $(n=0$

$3<u_0<4$ صحيح $P(0)$

نفرض $P(n)$ صحيح ونبرهن صحة $P(n+1)$

$P(n)$ صحيح : $3<u_n<4$

$P(n+1)$ صحيح : $3<u_{n+1}<4$ ؟

$3<u_n<4$ يعني $0<u_n-3<1$

أي $0<(u_n-3)^2<1$ ومنه

$3<(u_n-3)^2+3<4$ أي $3<u_{n+1}<4$

من أجل كل عدد طبيعي n : $3<u_n<4$

(u_n) محدودة

② أ) $u_{n+1}-u_n=(u_n-3)^2+3-u_n$

$=(u_n-3)^2-(u_n-3)$

$=(u_n-3)(u_n-3-1)$

$=(u_n-3)(u_n-4)$

$3<u_n$ يعني $u_n-3>0$ ومنه $u_n>3$

$u_n<4$ يعني $u_n-4<0$

أي $(u_n-3)(u_n-4)<0$ ومنه

$u_{n+1}-u_n<0$ أي (u_n) متناقصة تماما

ب) (u_n) متناقصة تماما ومحدودة

فهي تقبل نهاية متقاربة

③ $v_n=\ln(u_n-3)$

أ) (v_n) هندسية

$v_{n+1}=\ln(u_{n+1}-3)$

$=\ln((u_n-3)^2+3-3)$

$=\ln(u_n-3)^2$

$=2\ln(u_n-3)$

$v_{n+1}=2v_n$

(v_n) هندسية أساسها $q=2$

حدها الأول $v_0=\ln(u_0-3)$

$=\ln(3+e^{-2}-3)$

$=\ln e^{-2}=\boxed{-2}$

ب) $v_n=v_0q^n=-2\times2^n$

$v_n=\boxed{-2^{n+1}}$

ومنه $v_n=\ln(u_n-3)$ ومنه $u_n-3=e^{v_n}$

$u_n=e^{v_n}+3=3+e^{(-2^{n+1})}$

جـ) $\lim_{n\to+\infty}u_n=\lim_{n\to+\infty}3+e^{(-2^{n+1})}$

$=\boxed{3}$ لأن $\lim_{n\to+\infty}e^{(-2^{n+1})}=0$

④ $P_n=(u_0-3)(u_1-3)\times\dots\times(u_n-3)$

لدينا $u_n-3=e^{v_n}$ ومنه

$P_n=e^{v_0}\times e^{v_1}\times\dots\times e^{v_n}$

$=e^{v_0+v_1+\dots+v_n}$

$=e^{v_0\frac{q^{n+1}-1}{q-1}}$

$=e^{-2\left(\frac{2^{n+1}-1}{2-2}\right)}$

$P_n=e^{-2(2^{n+1}-1)}$

التمرين 4 (07)

① $g(x)=2\ln x-1-\frac{1}{x^2}$

$D=]0,+\infty[$

$g'(x)=\frac{2}{x}+\frac{2}{x^3}$ ①

$g'(x)>0$ على $]0,+\infty[$ و g متزايدة تماما على $]0,+\infty[$

② g مستمرة على $]0,+\infty[$ لأنها مجموع دالتين مستمرتين على $]0,+\infty[$

وهي مستمرة على $[1,89;1,90]$ ومتزايدة تماما على $[1,89;1,90]$

$g(1,89)=-0,0068$ $g(1,90)=0,0067$

$g(1,89)\times g(1,90)<0$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة للمعادلة $g(x)=0$ لها حل و وحيد $1,89<\alpha<1,90$

كتقريب $g(\alpha)=0$

ب)

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	‖	$-$	0	$+$	

II) $f(x)=-x-2+\frac{3+2\ln x}{x}$

$D=]0,+\infty[$

1) أ) $\lim_{x\to0}f(x)=\boxed{-\infty}$

$x=0$ معادلة م م بيانية

حامل محور التراتيب

ب) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}-x-2+\cancel{\frac{3}{x}}+2\cancel{\frac{\ln x}{x}}=\boxed{-\infty}$

أ) $f'(x)=-1+\frac{\frac{2}{x}x-(3+2\ln x)}{x^2}$

$=-1+\frac{-1-2\ln x}{x^2}$

$=\frac{-x^2-1-2\ln x}{x^2}$

$f'(x)=\frac{1}{x^2}[-x^2-1-2\ln x]$

ولدينا $\frac{1}{x^2}g(\frac{1}{x})=\frac{1}{x^2}\left[2\ln(\frac{1}{x})-1-\frac{1}{(\frac{1}{x})^2}\right]$

$=\frac{1}{x^2}\left[-2\ln x-1-\frac{1}{\frac{1}{x^2}}\right]$

$=\frac{1}{x^2}[-2\ln x-1-x^2]$

إذن $f'(x)=\frac{1}{x^2}g(\frac{1}{x})$ محققة

على $]0,+\infty[$

ب) إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(\frac{1}{x})$ لأن $\frac{1}{x^2}>0$

لدينا مما سبق $g(\frac{1}{x})=0$ لما $\frac{1}{x}=\alpha$

أي $x=\frac{1}{\alpha}$

$g(\frac{1}{x})<0$ لما $\frac{1}{x}<\alpha$ وبحساب المقلوب نجد

$x>\frac{1}{\alpha}$ أي $x\in]\frac{1}{\alpha},+\infty[$ وتكون f متناقصة تماما على $]\frac{1}{\alpha},+\infty[$

$g(\frac{1}{x})>0$ لما $\frac{1}{x}>\alpha$ وبحساب المقلوب نجد

$x<\frac{1}{\alpha}$ أي $x\in]0,\frac{1}{\alpha}[$ وتكون f متزايدة تماما على $]0,\frac{1}{\alpha}[$

خلاصة تكون f متزايدة تماما على $]0,\frac{1}{\alpha}]$

و f متناقصة تماما على $[\frac{1}{\alpha},+\infty[$

جـ)

x	0		$1/\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$f(\frac{1}{\alpha})$	↘	$-\infty$

3) $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(-x-2)]=\lim_{x\to+\infty}\cancel{\frac{3}{x}}+2\cancel{\frac{\ln x}{x}}$

$=0$

إذن (Δ) معادلته $y=-x-2$ م م مائل لـ (C)

عند $+\infty$

ب) الوضعية النسبية لـ (C) و (Δ)

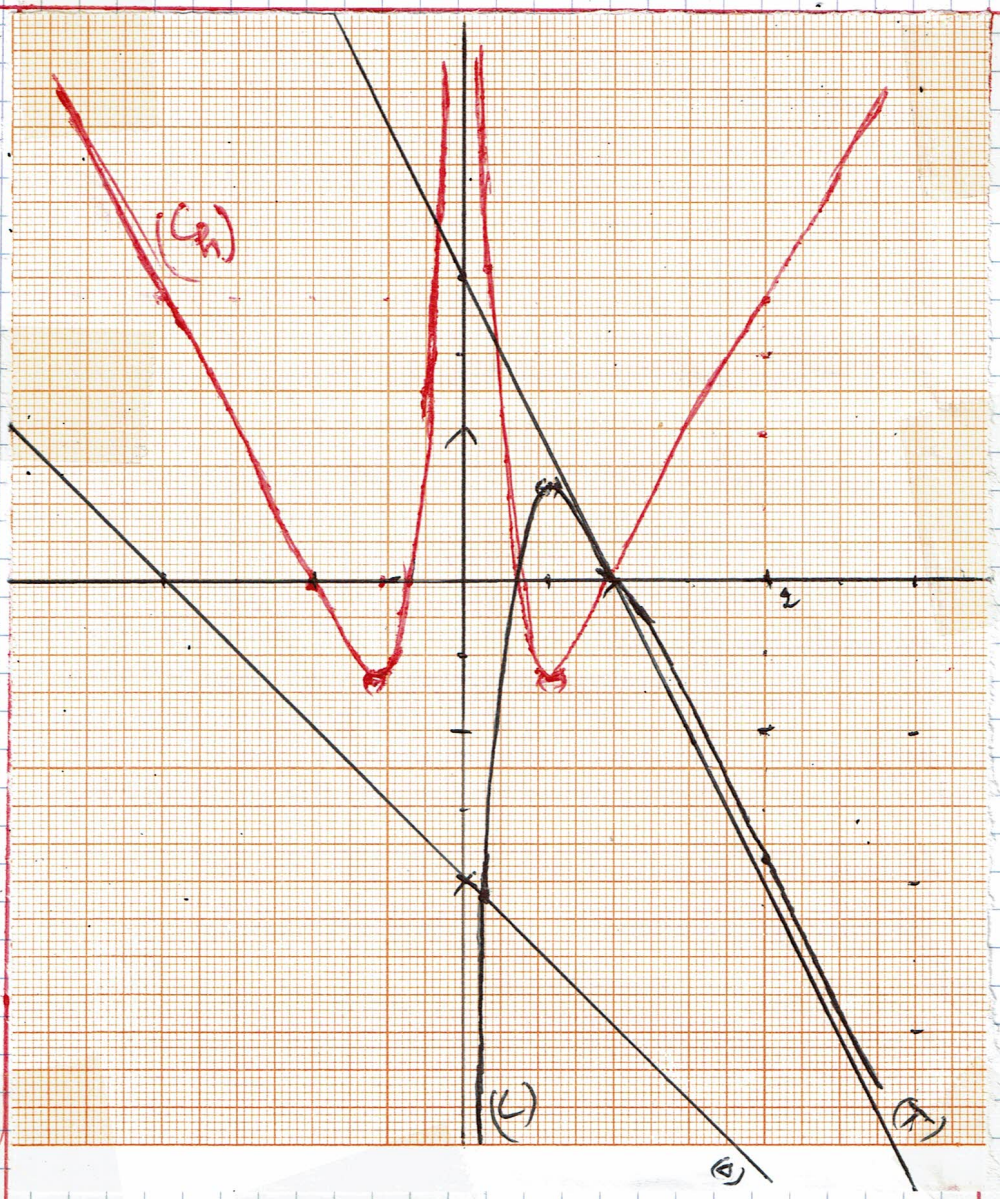
$f(x)-y=\frac{3+2\ln x}{x}$

$\ln x=-\frac{3}{2}$ يعني $2\ln x+3=0$

ومنه $x=e^{-3/2}$

تعدم إشارة $2\ln x+3$

x	0		$e^{-3/2}$		$+\infty$
$2\ln x+3$	‖	$-$	0	$+$	
الوضعية	‖	(C) تحت (Δ)	M	(C) فوق (Δ)	



$m(e^{-\frac{3}{2}}, -e^{-\frac{3}{2}}-2)$ تقبل تقاطع (C) , (Δ)

④ (C) يقبل نقطة A فاصلتها 1

$$f'(x) = \frac{-x^2-1-2\ln x}{x^2}$$

$$f''(x) = \frac{(-2x-\frac{2}{x})x^2 - 2x(-x^2-1-2\ln x)}{x^4}$$

$$= \frac{(-2x-\frac{2}{x})x - 2(-x^2-1-2\ln x)}{x^3}$$

$$= \frac{\cancel{-2x^2}\cancel{-2}+\cancel{2x^2}\cancel{+2}+4\ln x}{x^3}$$

$$= \frac{4\ln x}{x^3}$$

إشارته من إشارة $\ln x$

x	0		1		$+\infty$
$\ln x$	‖	$-$	0	$+$	

(C) يقبل نقطة انعطاف وحيدة

$A(1,0)$

(T) مماس (C) في $A(1,0)$

$$y = f'(1)(x-1) + f(1)$$

$$y = -2(x-1) + 0$$

$$(T): y = -2x+2$$

x	1	2
y	0	-2

5) أ) رسم

$f(2) = -1,80$

⑥ $h(x) = |x| + 2 - \frac{3+\ln(x^2)}{|x|}$

$D =]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

① h دالة زوجية

من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$, $-x \in \mathbb{R}^*$

$$h(-x) = |-x| + 2 - \frac{3+\ln((-x)^2)}{|-x|}$$

$$= |x| + 2 - \frac{3+\ln(x^2)}{|x|}$$

$$= h(x)$$

h دالة زوجية ومنحنيها (C_h) متناظر بالنسبة لحامل محور التراتيب

ب) لدينا

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\lvert x\rvert$		$-x$	‖	x	

منه $h(x) = |x| + 2 - \frac{3+2\ln|x|}{|x|}$

$$h(x) = \begin{cases} x+2-\frac{3+2\ln x}{x}, & x\in]0,+\infty[\\ -x+2-\frac{3+2\ln(-x)}{-x}, & x\in]-\infty,0[\end{cases}$$

$$= \begin{cases} x+2-\frac{3+2\ln x}{x}, & x\in]0,+\infty[\\ -x+2+\frac{3+2\ln(-x)}{x}, & x\in]-\infty,0[\end{cases}$$

$$= \begin{cases} -(-x-2+\frac{3+2\ln x}{x}), & x\in]0,+\infty[\\ -(x-2-\frac{3+2\ln(-x)}{x}), & x\in]-\infty,0[\end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} -f(x) ; & x\in]0,+\infty[\\ -f(-x), & x\in]-\infty,0[\end{cases}$$

ج) (C_h) نظير (C_f) بالنسبة لحامل محور الفواصل

د) $]0,+\infty[$

ه) (C_h) نظير الجزء الأول المرسوم بالنسبة لحامل محور التراتيب لأن h زوجية $]-\infty,0[$